Глава (III) наставак

Примери линеарних векторских простора

(1) класични вектори → осим су поред наведених особина које мора имати лин. векторски простор, постоје и додатне – скаларно и векторско множење.

(2) класични тензори → додатне операције су тензорско множење $\hat{T}\hat{U} = \{\vec{T_k}, \vec{e_k}\}\cdot\{\vec{U_l}, \vec{e_l}\} = (\vec{e_k}\cdot\vec{U_l})\{\vec{T_k}, \vec{e_l}\}$ које није комутативно али јесте асоцијативно и операција образовања конјугованог тензора $\hat{T}^{*} = \{\vec{e_k}, \vec{T_k}\}$.

(3) Матрице типа $m\times n$ → додатна операција су матрично множење које, у општем случају, унутрашња композиција. Само је код квадратних матрица матрично множење унутрашња композиција.

(4) скуп бесконачних низова $x=(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots)$ (9) бива лин. векторски простор ако се збир два бесконачна низа дефинише као бесконачни низ чији су чланови једнаки збиру одговарајућих чланова низова, а производ скалара и беск. низа дефинише као беск. низ чији се чланови добијају множењем чланова полазног низа тим скаларом:

$$\left.\begin{aligned} x\oplus y &= (\xi_1+\eta_1, \xi_2+\eta_2, \dots, \xi_n+\eta_n, \dots) \\ \alpha x &= (\alpha\xi_1, \alpha\xi_2, \dots, \alpha\xi_n, \dots) \end{aligned}\right\} \dots (10)$$

- скуп свих ограничених низова би био потпростор лин. векторског простора скупа бесконачних низова.
- скуп свих конвергентних низова -ll-
- скуп свих нула-низова (низова чија је гранична вредност нула), је -ll-

(5) <u>Простор C[a,b]</u> свих непрекидних ф-ја дефинисаних у реалном затвореном интервалу [a,b], јер су збир двије непрекидне ф-је и производ непрекидне ф-је и константе (од. скалара) увијек непрекидне ф-је.

Линеарна независност. Изоморфизам линеарних векторских простора

се дефинише у датом линеарном векторском простору

<u>Појам линеарне независности</u>. За коначан број $x_1, x_2, \dots, x_m$ елемената датог линеарног векторског простора кажемо да су <u>линеарно независни</u> ако

$$\alpha_1 x_1 \oplus \alpha_2 x_2 \oplus \dots \oplus \alpha_m x_m = 0 \quad \text{--- (11)}$$

важи када су сви скалари α_i истовремено једнаки нули.
Нулти елемент се не може појавити ни у каквом скупу линеарно независних елемената.

Ако разматрамо бесконачан скуп $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ елемената неког лин. векторског простора, сматраћемо да су они линеарно независни ако је <u>линеарно независан било који скуп од коначног броја ових елемената</u>.

<u>Нпр.</u> У простору класичних вектора лин. ~~не~~зависност два вектора значи да су они колинеарни и да им је векторски производ 0.
Обрнуто, ако векторски производ два вектора није једнак 0, они су лин. независни. Три вектора ће бити лин. зависни ако су компланарни, тј. ако им је мјешовити производ 0. Ако, пак, мјешовити производ три вектора није нула, они су лин. независни! Више од три вектора у простору класичних вектора су увијек линеарно зависни, јер се сваки вектор може написати као линеарна комбинација три некомпланарна вектора (→ Gibbs-ова нотација, зад. 1.25 c).
У простору C[a,b] се <u>лин. независност</u> одређује <u>помоћу Wronski-јеве</u>

нпр. $\left.\begin{aligned}\vec{x_1} &= a\cdot\vec{e_1} \;/\cdot\alpha_1\\ \vec{x_2} &= b\cdot\vec{e_1} \;/\cdot\alpha_2\end{aligned}\right\}+$

$\alpha_1\vec{x_1} \oplus \alpha_2\vec{x_2} = \alpha_1 a\vec{e_1} + \alpha_2 b\vec{e_1} = (\alpha_1 a + \alpha_2 b)\vec{e_1} \neq 0$
одн. увијек можемо написати 1 вектор преко другог нпр. $\vec{x_2} = \frac{b}{a}\vec{x_1}$

Wronskijan скупа од n ф-ја $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n$ је:

$$W(\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n) = \begin{vmatrix} \phi_1 & \phi_2 & \dots & \phi_n \\ \phi_1' & \phi_2' & \dots & \phi_n' \\ \phi_1^{(n-1)} & \phi_2^{(n-1)} & \dots & \phi_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

детерминанта која мора бити <u>различита од нуле.</u>

<u>Димензије лин. векторског простора</u>

Линеарни векторски простор је <u>k-димензионалан</u> ако у њему постоји највише k лин. независних елемената, а сваки скуп од $(k+1)$ елемената је сигурно линеарно зависан. Ако постоји бесконачно много лин. независних елемената, одговарајући векторски простор је <u>бесконачно димензиони.</u>

<u>Нпр.</u> Простор класичних вектора је тродимензиони, јер постоје само три линеарно независна вектора.

Простор класичних тензора је деветодимензиони. Десет тензора је увијек линеарно зависно.

Простор свих бесконачних низова је бесконачно димензиони, јер су његови елементи $x_1 = (1, 0, 0, \dots)$, $x_2 = (0, 1, \dots)$, $x_3 = (0, 0, 1, \dots)$ очевидно линеарно независни.

<u>Линеал</u>

Нека су $x_1, x_2, \dots, x_m$ линеарно независни елементи у датом лин. векторском простору. Њихова лин. комбинација

$$x = \alpha_1 \cdot x_1 \oplus \alpha_2 \cdot x_2 \oplus \dots \oplus \alpha_m \cdot x_m \quad \text{--}(12)$$

ће, за сваки избор скалара $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$, представљати неки елемент уоченог линеарног векторског простора. Скуп свих елемената x облика (12) представља <u>линеал над елементима $x_1, x_2, \dots, x_m$</u>.

Пр. У простору класичних вектора линеал над линеарно независним елементима $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$ биће скуп свих вектора облика $\vec{x} = \alpha_1\vec{e}_1 + \alpha_2\vec{e}_2$, дакле, вектора који леже у x_1Ox_2-равни.

У простору класичних тензора, линеал над лин. независним тензорима $T_1 = \{\vec{e}_1, \vec{e}_1\}$, $T_2 = \{\vec{e}_2, \vec{e}_2\}$ и $T_3 = \{\vec{e}_3, \vec{e}_3\}$ је скуп тензора облика:

$$T = \alpha_1 T_1 + \alpha_2 T_2 + \alpha_3 T_3 =$$

$$= \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3 \end{pmatrix},$$

тј. скуп свих симетричних тензора чији се главни правци поклапају са $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ и $\vec{e}_3$ → нормални облик симетричног тензора или дијагонализоване матрице тензора.

Алгебарска база

Ако се линеал над датим скупом линеарно независних елемената поклапа са целим уоченим линеарним векторским простором, кажемо да ти елементи образују алгебарску (Хамелову) базу тог простора.

У k-димензионом линеарном векторском простору алгебарска база има тачно k елемената.

У простору класичних вектора, нпр. $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ и $\vec{e}_3$ образују алгебарску базу. Ма која друга три линеарно независна вектора ће такође образовати алгебарску базу овог простора.

У простору класичних тензора девет коорд. дијада $\bar{\sigma}_{ij} = \{\vec{e_i}, \vec{e_j}\}$ образују једну алгебарску базу.

Код бесконачно димензионих линеарних векторских простора може се десити да алгебарска база и не постоји. То значи да не постоји ~~[illegible]~~ бесконачан скуп линеарно независних елемената таквих да се ма који други елемент тог простора може приказати као њихова лин. комбинација са коначним бројем сабирака.

Алгебарски изоморфизам

Нека су L и L^* два линеарна векторска простора, међу чијим је елементима дефинисана обострано једнозначна кореспонденција $x \longleftrightarrow x^*$. Ту кореспонденцију зовемо алгебарски изоморфизам ако из $x \longleftrightarrow x^*$ и $y \longleftrightarrow y^*$ произилази и

унутрашња композиција у одн. на сабирање у L^*

$$x \oplus y \longleftrightarrow x^* \oplus^* y^*, \quad \lambda x \longleftrightarrow \lambda x^* \quad ---(13),$$

за ма какве елементе $x, y \in L$ и ма какав скалар λ. Овде је $\oplus^*$ означена унутрашња композиција у L^*.

Два k димензиона лин. векторска простора се увек могу учинити алгебарски изоморфним. Кореспонденција $x \longleftrightarrow x^*$ се поставља тако што се у оба простора одабере по једна алгебарска база; њихове елементе означимо са $x_1, x_2, \dots, x_k$ и $x_1^*, x_2^*, \dots, x_k^*$ респективно и ставимо $x_1 \longleftrightarrow x_1^*$, $x_2 \longleftrightarrow x_2^*$, ..., $x_k \longleftrightarrow x_k^*$. Затим произвољном елементу из L, који се може приказати у обл. $x = \lambda_1 x_1 \oplus \lambda_2 x_2 \oplus \dots \oplus \lambda_k x_k$, придружујемо у складу са релацијама (13) елемент $x^* = \lambda_1 x_1^* \oplus^* \lambda_2 x_2^* \oplus^* \dots \oplus^* \lambda_k x_k^*$ из L^*. Тиме је алгебарска структура једног простора потпуно пресликана у алгебарску структуру другог. Симболички је то:

$$x = \lambda_1 x_1 \oplus \lambda_2 x_2 \oplus \dots \oplus \lambda_k x_k \longleftrightarrow (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k) \quad ---(15)$$

Метрички простори

Простор X ће бити метрички простор ако се дефинише однос растојања између ма која два његова елемента, тј. ако постоји правило на основу кога се сваком пару елемената $x, y \in X$ може придружити један реалан број $\rho(x,y)$ који ћемо звати растојање. По аналогији са растојањем у Еуклидовом простору, при дефинисању морају бити задовољени аксиоми растојања:

а) $\rho(x,y) \geq 0$; $\rho(x,y)=0 \Leftrightarrow x=y$, ненегативност (16)

б) $\rho(x,y) = \rho(y,x)$ симетричност (17)

в) $\rho(x,y) \leq \rho(x,z) + \rho(y,z)$ релација троугла (18)

Дефинисањем растојања у складу са горњим аксиомима, можемо различито у датом простору X увести метрику. У скупу истих математичких објеката могу се увести различите метрике. Тиме се добијају различити метрички простори.

Нормирани простори

Аксиоми норме

Структура лин. векторског простора се може обогатити увођењем норме елемената, тј. дефинисањем начина на који се сваком елементу x једнозначно може придружити један реалан број – норма.

у ознаци $\|x\|$. При томе, за неки елемент $x \in X$ и неки скалар λ морају важити аксиоми норме:

а) $\|x\| \geq 0$; $\|x\| = 0 \iff x = \theta$ ненегативност (19)

б) $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$, хомогеност (20)

ц) $\|x \oplus y\| \leq \|x\| + \|y\|$, — — (21)

За разлику од метрике, увођење норме захтева да простор који се жели нормирати има структуру линеарног векторског простора, јер се у аксиомима б) и ц) захтевају множење елемената скаларом и сабирање елемената.

~~Потпун~~ Особина комплетности лин. векторског простора

Метрички простор који има особину да је у њему сваки Кошијев низ [Низ (x_n) елемената датог метричког простора је Кошијев низ ако на основу уведеног произвољног $\varepsilon > 0$ одговара неки природни број $N(\varepsilon)$ такав да је $\rho(x_m, x_n) < \varepsilon$ за $\forall m, n > N(\varepsilon)$.] Сваки Кошијев низ је ограничен.] конвергентан зове комплетним.

Нормирани простори који имају особину комплетности зову се Банахови простори.

Веза између норме и метрике

Нормирани линеарни метрички простор је уједно потпуно дефинисан метричким простором. Што се види из чињенице да је релација

$$\varrho(x,y) = \| x \ominus y \| \quad \ldots \quad (22)$$

дефинисана једна скаларна величина која има све особине растојања између x и y. Овдје $\ominus$ има значење као у једначини (4). Ова метрика је проистекла из норме, тј. она је <u>генерисана нормом</u>. Обрнуто, у општем случају не важи.